УДК 517.2/.3

О СИММЕТРИИ ФУНКЦИЙ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ В КРУГЕ

А.А. Шум

Симметрия вообще многогранна и многолика, это же относится и к симметрии функций. Так например, функции одной переменной могут быть симметричны в соответствии с традиционными определениями четности и нечетности [1], но могут быть инверсно-симметричны в соответствии с определениями из [2].

В настоящей заметке рассматриваются функции двух переменных, определен-ные в круге радиуса R с центром в начале координат, и различные виды симметрии таких функций. Поводом для дискуссии служит задача: каким условиям должна удовлетворять функция, определяющая плотность материала плоской пластины, имеющей форму круга, чтобы всякий диаметр этой пластины делил ее на две части одинаковой массы?

Очевидно, что функция, о которой идет речь в задаче, должна быть сим-метричной, но в каком именно смысле?

Поскольку область определения нашей функции есть круг, будем использовать полярные координаты. Как известно [1], масса пластины равна двойному интегралу от функции плотности, поэтому функция $f(\varphi,\rho)$, о которой говорится в задаче, должна обладать следующим свойством:

(s) при любом разбиении исходного круга S на два полукруга S_1 и S_2 выполняется равенство $\iint\limits_{S_1} f(\varphi,\rho)\rho d\rho d\varphi = \iint\limits_{S_2} f(\varphi,\rho)\rho d\rho d\varphi$.

Может быть, такая круглая пластина должна иметь центр масс в своем центре?

Из известных формул для вычисления координат центра масс плоской пластины [1] вытекают условия, необходимые и достаточные для того, чтобы рассматриваемая пластина формы круга имела центр масс в центре этого круга:

$$(c)\qquad \begin{cases} \iint\limits_{S} \rho\cos\varphi f(\varphi,\rho)\rho d\rho d\varphi = 0 \\ \iint\limits_{S} \rho\sin\varphi f(\varphi,\rho)\rho d\rho d\varphi = 0 \end{cases},$$

Разумеется, функция, определяющая плотность, должна быть положительна. Однако, абстрагируясь от условий исходной задачи, мы будем рассматривать произвольную функцию $f(\varphi,\rho)$, определенную в круге радиуса R с центром в начале координат. Об этой функции (чтобы она была однозначной) будем предполагать, что она *имеет период* 2π, то есть $f(\varphi,\rho) = f(\varphi+2\pi,\rho)$ для любого φ и любого $\rho\in[0;R]$. Если изначально такая функция определяется только для значений аргумента φ из некоторого промежутка длиной 2π, то предполагается, что она автоматически продолжается до периодической с периодом 2π.

Функцию $f(\varphi,\rho)$ будем называть *s-симметричной*, если она обладает свойством *(s)*, и *c-симметричной*, если она удовлетворяет условиям *(c)*. Как установлено ниже, эти два вида симметрии различны (будут указаны две функции, одна из которых s-симметрична, но не c-симметрична, а другая c-симметрична, но не s-симметрична, и притом обе они неотрицательны и не-прерывны).

Между тем следует вспомнить традиционные определения симметрии функции двух переменных.

Функция $f(\varphi,\rho)$ *радиально-симметрична*, если ее значения не зависят от угла φ, а зависят только от расстояния ρ до начала координат.

Функция $f(\varphi,\rho)$ *осе-симметрична*, если она симметрична относительно обеих осей прямоугольной декартовой системы координат, то есть если для любых значений переменных φ и $\rho \in [0; R]$ выполнены равенства $f(\varphi,\rho) = f(-\varphi,\rho)$ и $f(\varphi,\rho) = f(\pi-\varphi,\rho)$.

Функция $f(\varphi,\rho)$ *центрально-симметрична*, если она симметрична от-носительно начала координат, то есть если для любых значений переменных φ и $\rho \in [0; R]$ выполнено равенство $f(\varphi,\rho) = f(\varphi+\pi,\rho)$.

Легко проверить, что всякая радиально-симметричная функция будет также и осе-симметричной (но не наоборот), а всякая осе-симметричная функция будет также и центрально-симметричной (но не наоборот). Нетрудно убедиться, что всякая центрально-симметричная функция будет также *s*-симметричной и *c*-симметричной, а тот факт, что обратные утверждения не выполнены, устанавливают следующие ниже леммы 1 и 2.

Через C_α будем обозначать круговой сектор, определяемый условием $0 \le \varphi \le \alpha$.

Функцию $f(\varphi,\rho)$ назовем *к-симметричной*, если имеется постоянный коэф-фициент *k*, такой, что $\iint\limits_{C\alpha} f(\varphi,\rho)\rho d\rho d\varphi = k\alpha$ для любого угла $\alpha \in [0; 2\pi]$.

Очевидно, что для *к*-симметричной функции двойной интеграл по любому сектору с углом α будет пропорционален углу α, поэтому всякая *к*-симметричная функция является также и *s*-симметричной.

Лемма 1. *Функция* $f_1(\varphi,\rho) = \dfrac{12}{4\sin\frac{\varphi}{2}+1}(\rho\sin\frac{\varphi}{2}+\rho-\rho^2)$, *где* $0 \le \varphi \le 2\pi$ *и* $0 \le \rho \le 1$, *в круге радиуса* $R = 1$ *является к-симметричной, но не с-симметричной.*

Доказательство

Функция $f_1(\varphi,\rho)$ является *к*-симметричной, так как $\iint\limits_{C\alpha} f_1(\varphi,\rho)\rho d\rho d\varphi =$

$$= \iint\limits_{C\alpha} \frac{12}{4\sin\frac{\varphi}{2}+1}(\rho\sin\frac{\varphi}{2}+\rho-\rho^2)\rho d\rho d\varphi = \int_0^\alpha \frac{12}{4\sin\frac{\varphi}{2}+1}d\varphi\int_0^1(\rho^2\sin\frac{\varphi}{2}+\rho^2-\rho^3)d\rho =$$

$$= \int_0^\alpha \frac{12}{4\sin\frac{\varphi}{2}+1}\left[\frac{\rho^3}{3}\sin\frac{\varphi}{2}+\frac{\rho^3}{3}-\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 d\varphi = \int_0^\alpha \frac{12}{4\sin\frac{\varphi}{2}+1}\left[\frac{1}{3}\sin\frac{\varphi}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right]d\varphi = \int_0^\alpha d\varphi = \alpha.$$

Коэффициент пропорциональности k в данном случае равен 1.

Докажем теперь, что функция $f_1(\varphi,\rho)$ не является *с*-симметричной.

$$\iint\limits_{S} \rho\cos\varphi f_1(\varphi,\rho)\rho d\rho d\varphi = \iint\limits_{S} \rho\cos\varphi\frac{12}{4\sin\frac{\varphi}{2}+1}(\rho\sin\frac{\varphi}{2}+\rho-\rho^2)\rho d\rho d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{12\cos\varphi}{4\sin\frac{\varphi}{2}+1}d\varphi\int_0^1(\rho^3\sin\frac{\varphi}{2}+\rho^3-\rho^4)d\rho = \int_0^{2\pi}\frac{12\cos\varphi}{4\sin\frac{\varphi}{2}+1}\left[\frac{\rho^4}{4}\sin\frac{\varphi}{2}+\frac{\rho^4}{4}-\frac{\rho^5}{5}\right]_0^1 d\varphi =$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{12\cos\varphi}{4\sin\frac{\varphi}{2}+1}\left(\frac{1}{4}\sin\frac{\varphi}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)d\varphi=\frac{3}{5}\int_0^{2\pi}\frac{5\sin\frac{\varphi}{2}+1}{4\sin\frac{\varphi}{2}+1}\cos\varphi d\varphi=\left\{\begin{array}{c} x=\frac{\varphi}{2}\\ \varphi=2x\\ d\varphi=2dx\end{array}\right\}=$$

$$=\frac{6}{5}\int_0^{\pi}\frac{5\sin x+1}{4\sin x+1}\cos 2xdx=\frac{6}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{5\sin x+1}{4\sin x+1}\cos 2xdx+\frac{6}{5}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{5\sin x+1}{4\sin x+1}\cos 2xdx=\left\{\begin{array}{c} t=\pi-x\\ x=\pi-t\\ dx=-dt\end{array}\right\}=$$

$$=\frac{6}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{5\sin x+1}{4\sin x+1}\cos 2xdx+\frac{6}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{5\sin t+1}{4\sin t+1}\cos 2tdt=\frac{12}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{5\sin x+1}{4\sin x+1}\cos 2xdx=$$

$$=\frac{12}{5}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{5\sin x+1}{4\sin x+1}\cos 2xdx+\frac{12}{5}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{5\sin x+1}{4\sin x+1}\cos 2xdx=\left\{\begin{array}{c} t=\frac{\pi}{2}-x\\ x=\frac{\pi}{2}-t\\ dx=-dt\end{array}\right\}=\frac{12}{5}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{5\sin x+1}{4\sin x+1}\cos 2xdx-$$

$$-\frac{12}{5}\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\frac{5\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+1}{4\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+1}\cos(\pi-2t)dt=\frac{12}{5}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{5\sin x+1}{4\sin x+1}\cos 2xdx-\frac{12}{5}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{5\cos t+1}{4\cos t+1}\cos 2tdt=$$

$$=\frac{12}{5}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{5\sin x+1}{4\sin x+1}-\frac{5\cos x+1}{4\cos x+1}\right)\cos 2xdx=\frac{12}{5}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{(4\sin x+1)(4\cos x+1)}\cos 2xdx.$$

Поскольку при $x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right)$ подынтегральная функция меньше нуля, то и сам интеграл меньше нуля, а это значит, что первое из двух условий *(c)* не выполнено и потому функция $f_1(\varphi,\rho)$ не является *c*-симметричной (центр масс, хотя и лежит на горизонтальной оси, поскольку функция $f_1(\varphi,\rho)$ симметрична относительно этой оси, но сдвинут вдоль нее влево).

Доказанная лемма доставляет пример функции, которая в круге радиуса $R=1$ является *s*-симметричной, но не является ни радиально-симметричной, ни осе-симметричной, ни центрально-симметричной, ни *c*-симметричной. Отметим, что эта функция является в рассматриваемом круге также непрерывной и неотрицательной.

Лемма 2. *Функция* $f_2(\varphi,\rho)=\begin{cases}\rho\sin\varphi & при \quad 0\le\varphi\le\pi\\ -2\rho^5\sin\varphi & при \quad \pi\le\varphi\le 2\pi\end{cases}$ *в круге радиуса* $R=1$ *является c-симметричной, но не s-симметричной.*

Доказательство

Поскольку $f_2(\varphi,\rho)=f_2(\pi-\varphi,\rho)$, то функция $f_2(\varphi,\rho)$ симметрична относи-тельно вертикальной оси, и потому легко установить, что первое из двух условий *(c)* выполнено (абсцисса центра масс равна нулю). Проверим выполнение второго условия.

$$\iint_S\rho\sin\varphi f_2(\varphi,\rho)\rho d\rho d\varphi=\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1\rho\sin\varphi\rho\sin\varphi\rho d\rho-\int_{\pi}^{2\pi}d\varphi\int_0^1\rho\sin\varphi 2\rho^5\sin\varphi\rho d\rho=$$

$$= \int_0^{\pi} \sin^2 \varphi d\varphi \int_0^1 \rho^3 d\rho - \int_{\pi}^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi \int_0^1 2\rho^7 d\rho = \int_0^{\pi} \sin^2 \varphi \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 d\varphi - 2\int_{\pi}^{2\pi} \sin^2 \varphi \left[\frac{\rho^8}{8} \right]_0^1 d\varphi =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \sin^2 \varphi d\varphi - \frac{1}{4}\int_{\pi}^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = \begin{Bmatrix} t = \varphi - \pi \\ \varphi = t + \pi \\ d\varphi = dt \end{Bmatrix} = \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \sin^2 \varphi d\varphi - \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \sin^2 t dt = 0 .$$

Таким образом, функция $f_2(\varphi, \rho)$ c-симметрична. Для того чтобы показать, что эта функция не является s-симметричной, разделим круг S на два полукруга, S_1 и S_2, диаметром, лежащим на горизонтальной оси, тогда

$$\iint\limits_{S_1} f_2(\varphi, \rho)\rho d\rho d\varphi = \iint\limits_{S_1} \rho \sin \varphi \rho d\rho d\varphi = \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^1 \rho^2 d\rho = \left[-\frac{1}{3}\cos\varphi \right]_0^{\pi} = \frac{2}{3} ,$$

$$\iint\limits_{S_2} f_2(\varphi, \rho)\rho d\rho d\varphi = -\iint\limits_{S_2} 2\rho^5 \sin \varphi \rho d\rho d\varphi = -2\int_{\pi}^{2\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^1 \rho^6 d\rho = -2\left[-\frac{1}{7}\cos\varphi \right]_{\pi}^{2\pi} = \frac{4}{7} .$$

Поскольку эти два интеграла имеют разные значения, то функция $f_2(\varphi, \rho)$ не является s-симметричной.

Доказанная лемма доставляет пример функции, которая в круге радиуса $R = 1$ является c-симметричной, но не является ни радиально-симметричной, ни осе-симметричной, ни центрально-симметричной, ни s-симметричной. Отметим, что эта функция в рассматриваемом круге также непрерывна и неотрицательна.

Следующая лемма предоставляет критерии κ-симметричности и s-симметричности.

Лемма 3. *Пусть функция* $f(\varphi, \rho)$ *непрерывна в круге радиуса* R *и* $F(\varphi) = \int_0^R f(\varphi, \rho)\rho d\rho$, *тогда*

а) функция $f(\varphi, \rho)$ *является к-симметричной тогда и только тогда, когда функция* $F(\varphi)$ *является постоянной;*

б) функция $f(\varphi, \rho)$ *является s-симметричной тогда и только тогда, когда функция* $F(\varphi)$ *является периодической с периодом π.*

Доказательство утверждения а

Рассмотрим функцию $\Phi(\alpha) = \iint\limits_{C\alpha} f(\varphi, \rho)\rho d\rho d\varphi$. Очевидно, что

$$\Phi(\alpha) = \int_0^{\alpha} d\varphi \int_0^R f(\varphi, \rho)\rho d\rho = \int_0^{\alpha} F(\varphi) d\varphi . \tag{1}$$

В силу известной [1] теоремы о производной определенного интеграла по переменному верхнему пределу

$$\Phi'(\alpha) = F(\alpha) . \tag{2}$$

Если функция $f(\varphi, \rho)$ κ-симметрична, то $\Phi(\alpha) = k\alpha$, а потому $\Phi'(\alpha) = k$, и в силу соотношения (2) функция $F(\varphi)$ является постоянной. Обратное очевидно из соотношения (1).

Доказательство утверждения б

Обозначим через S_α половину рассматриваемого круга S, определяемую условием $\alpha \le \varphi \le \alpha+\pi$, и рассмотрим функцию $G(\alpha)=\iint\limits_{S\alpha} f(\varphi,\rho)\rho d\rho d\varphi$:

$$G(\alpha)=\int\limits_{\alpha}^{\alpha+\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{R} f(\varphi,\rho)\rho d\rho=\int\limits_{\alpha}^{\alpha+\pi} F(\varphi)d\varphi=\int\limits_{0}^{\alpha+\pi} F(\varphi)d\varphi-\int\limits_{0}^{\alpha} F(\varphi)d\varphi=\Phi(\alpha+\pi)-\Phi(\alpha).$$

Как следует из соотношения (2):

$$G'(\alpha)=F(\alpha+\pi)-F(\alpha). \tag{3}$$

Очевидно, что функция $f(\varphi,\rho)$ является s-симметричной, в том и только том случае, когда $G(\alpha)=\frac{1}{2}\iint\limits_{S} f(\varphi,\rho)\rho d\rho d\varphi=const$. Следовательно (в силу теоремы о производной постоянной функции [1]) функция $f(\varphi,\rho)$ является s-симметричной тогда и только тогда, когда $G'(\alpha)\equiv 0$. Поскольку в силу (3) последнее условие равносильно тому, что $F(\alpha+\pi)=F(\alpha)$ при любом значении угла α, то утверждение *б*, а вместе с ним и лемма полностью, доказаны.

При помощи критерия *а* леммы 3 можно подтвердить *к*-симметричность функции $f_1(\varphi,\rho)$ из леммы 1, вычислив функцию

$$F_1(\varphi)=\int\limits_0^1 f_1(\varphi,\rho)\rho d\rho=\int\limits_0^1 \frac{12}{4\sin\frac{\varphi}{2}+1}(\rho\sin\frac{\varphi}{2}+\rho-\rho^2)\rho d\rho=$$

$$=\frac{12}{4\sin\frac{\varphi}{2}+1}\int\limits_0^1(\rho^2\sin\frac{\varphi}{2}+\rho^2-\rho^3)d\rho=\frac{12}{4\sin\frac{\varphi}{2}+1}\left[\frac{1}{3}\sin\frac{\varphi}{2}+\frac{1}{12}\right]=1=const.$$

Тот факт, что функция $f_2(\varphi,\rho)$ из леммы 2 не является s-симметричной, можно подтвердить при помощи критерия *б*:

$$F_2(\varphi)=\int\limits_0^1 f_2(\varphi,\rho)\rho d\rho=\begin{cases}\int\limits_0^1 \rho\sin\varphi\rho d\rho=\sin\varphi\int\limits_0^1\rho^2 d\rho=\frac{1}{3}\sin\varphi & \text{при } 0\le\varphi\le\pi\\ -\int\limits_0^1 2\rho^5\sin\varphi\rho d\rho=-2\sin\varphi\int\limits_0^1\rho^6 d\rho=-\frac{2}{7}\sin\varphi & \text{при } \pi\le\varphi\le 2\pi\end{cases}$$

Эта функция не является периодической с периодом π, поскольку $F_2(\frac{\pi}{2})=\frac{1}{3}$, в то время как $F_2(\frac{3\pi}{2})=\frac{2}{7}$.

Библиографический список

1. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. / Г.М. Фихтенгольц. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. Т. 1. 671 с.

2. Лесничевская, И.А. О свойствах инверсно-симметричных функций / И.А. Лесничевская, А.А. Шум // Интеграция науки и образования – производству и экономике: сборник трудов межрегиональной научно-технической конференции, посвященной 90-летию основания ТвГТУ. Т. 2, с. 23. Тверь, 2012.